

5. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Уравнение затухающих колебаний тела:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где A_0 -начальная амплитуда, β -коэффициент затухания, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота затухающих колебаний, ω_0 -собственная частота.

Время релаксации: $\tau = \frac{1}{\beta}$.

Декремент затухания: $D = e^{\beta T}$.

Логарифмический декремент затухания: $\lambda = \beta T$.

5.1. Период затухающих колебаний равен $T = 4$ с, логарифмический декремент затухания 1,6; начальная фаза равна 0. Смещение точки в момент $T/4$ равно 4,5 см. Написать уравнение колебаний и построить график в пределах трёх периодов. Ответ: $x = 6,7 e^{-0,4t} \sin(0,5\pi)$, см.

5.2. Написать уравнение и построить график затухающих колебаний тела, если коэффициент затухания равен $0,01 \text{ с}^{-1}$, частота колебаний $0,125 \text{ с}^{-1}$, в начальный момент времени тело находилось в положении амплитудного отклонения, равного 10 см. За какое число колебаний амплитуда уменьшится в e раз? Ответ: $N_e = 12,5$.

5.3. Уравнение затухающих колебаний имеет вид $x = 0,5 e^{-0,25t} \sin(0,5\pi)$ (м, с). Найти время релаксации, логарифмический декремент затухания и скорость колеблющейся точки в момент времени 0, T , $2T$ (где T – период колебания). Ответ: $\tau = 4$ с; $\lambda = 1, 0,79, 0,29, 0,11$ м/с.

5.4. Логарифмический декремент затухания математического маятника равен 0,2. Найти, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за два полных колебания. Напишите уравнение движения этого маятника, если период колебаний 2 с, начальная амплитуда 10 см, начальная фаза $\pi/2$. Ответ: $A_0/A = 1,5$; $x = 0,1 e^{-0,1t} \sin(\pi + 0,5\pi)$, м.

5.5. Чему равен логарифмический декремент и коэффициент затухания математического маятника длиной 1 м, если за 1 мин амплитуда колебаний маятника уменьшилась в два раза? Ответ: $\lambda = 0,023$; $\beta = 0,012$.

5.6. Математический маятник длиной 24,7 см, совершает затухающие колебания. Через сколько времени энергия колебаний

уменьшится в 9,4 раза? Задачу решить при значении логарифмического декремента: 1) 0,01 и 2) 0,1. Ответ: $t_1=112$ с; $t_2=11,2$ с.

5.7. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 мин уменьшается вдвое. Во сколько раз она уменьшится за 3 мин? Чему равно время релаксации и логарифмический декремент затухания, если длина маятника 1 м? Ответ: $A_0/A=86$; $\tau=86$ с; $\lambda=0,023$.

5.8. Математический маятник длиной 0,5 м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на 5 см, а при втором (в ту же сторону) на 4 см. Найти время релаксации, декремент затухания и логарифмический декремент затухания. Ответ: $\tau=6,4$ с, $D=1,25$, $\lambda=0,223$.

5.9. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время $t_1=5$ мин уменьшается в два раза. За какое время t_2 , считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз? С каким логарифмическим декрементом затухания колеблется этот маятник, если частота его колебаний $0,5 \text{ с}^{-1}$? Ответ: $t_2=15$ мин; $\lambda=0,0046$.

5.10. Амплитуда колебаний математического маятника длиной 0,6 м уменьшилась в два раза за 10 мин. Определить логарифмический декремент затухания и коэффициент сопротивления, если $m = 0,5$ г. Ответ: $\lambda=0,0018$, $r = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Н·с/м}$.

5.11. Математический маятник длиной 0,9 м отклонили на 5 см и отпустили, после чего он начал совершать затухающие колебания. Через 5 полных колебаний амплитуда уменьшилась в 2 раза. Написать уравнение движения этого маятника, если они совершаются по закону синуса. Ответ: $x = 5e^{-0,074t} \sin(3,3t + 0,5\pi)$ (см).

5.12. Гиря массой 500 г подвешена на пружине жёсткостью 20 Н/м и совершает колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания 0,004. Определить число полных колебаний, которое должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в два раза. За какое время произойдет это уменьшение? Ответ: $N=173$; $t=2$ мин 52 с.

5.13. Тело массой 5 г совершает затухающие колебания. В течение времени 50 с тело потеряло 60 % своей первоначальной энергии. Определить коэффициент сопротивления среды, в которой колеблется тело. Ответ: $r=9,2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/с}$.

5.14. Найти число полных колебаний тела, в течение которых его энергия уменьшается в 2 раза. Логарифмический декремент затухания равен 0,01. Ответ: $N=34$.

5.15. Шарик массой 200 г подвешен на пружине и совершает вертикальные затухающие колебания в воде с логарифмическим декрементом 0,05. При этом за 23 с его энергия уменьшается в 10 раз. Найти по этим данным жёсткость пружины. Ответ: $k=7,9 \text{ Н/м}$.

5.16. За $t=4$ минуты колебаний математического маятника длиной 0,5 м, амплитуда уменьшилась в 1,5 раза. Определите коэффициент затухания и логарифмический декремент λ . Ответ: $\beta = 0,0017$; $\lambda = 0,0024$.

5.17. Математический маятник длиной $l=1$ метр совершает колебания с логарифмическим декрементом затухания $\lambda = 0,23$. Во сколько раз уменьшится амплитуда через 10 секунд колебаний. Рассчитайте коэффициент затухания β . Ответ: $A_0/A=3,2$; $\beta = 0,115$.

5.18. Пружинный маятник массой 100 г совершает затухающие колебания на пружине жесткостью $k=6$ Н/м. Через какой промежуток времени его энергия уменьшится в 16 раз, если логарифмический декремент затухания $\lambda = 0,03$? Рассчитайте коэффициент затухания β . Ответ: $t=37,5$ с; $\beta = 0,037$ 1/с.

5.19. Через $N=8$ полных колебаний пружинного маятника амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. Найдите промежуток времени за который это произошло если жесткость пружины $k=10$ Н/м, а масса груза на пружине $m=50$ гр. Рассчитайте энергию ΔE , потерянную маятником за 8 колебаний, если начальная амплитуда $A_0=20$ см. Ответ: $t=3,52$ с; $\Delta E=0,15$ Дж.

5.20. Энергия математического маятника длиной 30 см, совершающего затухающие колебания, уменьшилась в 16 раз. Рассчитайте, за какой промежуток времени это произошло? Определите число полных колебаний N , совершённых маятником к этому времени, если коэффициент затухания $\beta = 0,06$. Ответ: $t=23,1$ с; $N=21$.

6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

6.1. Шар массой $m_1=5$ кг движется со скоростью $V_1=1$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2=2$ кг. Определите скорости шаров после удара. Удар считать упругим, прямым и центральным. Ответ: 0,43 м/с, 1,43 м/с.

6.2. Тело массой $m_1=5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2=2,5$ кг, которое после удара приобретает кинетическую энергию $E=5$ Дж. Считая удар центральным и упругим, найдите кинетическую энергию первого тела до и после удара. Ответ: 5,62 Дж, 0,62 Дж.

6.3. Шар массой $m_1=4$ кг движется со скоростью $V_1=5$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_2=6$ кг, который движется ему навстречу со скоростью $V_2=2$ м/с. Определите скорости шаров после удара. Удар считать абсолютно упругим, прямым и центральным. Ответ: 3,4 м/с, 3,6 м/с.

6.4. Движущийся шар массой $m_1=2$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы и теряет при этом 40% своей кинетической энергии. Определите массу m_2 большего шара. Удар считать абсолютно упругим, прямым и центральным. Ответ: 15,7 кг.

6.5. Тело массой $m=3$ кг движется со скоростью $V=4$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и абсолютно неупругим, найдите количество тепла, выделившееся при ударе. Ответ: 12 Дж.

6.6. Из ствола автоматического пистолета вылетела пуля массой $m_1=10$ г со скоростью $V=300$ м/с. Затвор пистолета массой $m_2=200$ г прижимается к стволу пружиной, жесткость которой $k=25$ кН/м. Определите, на какое расстояние отойдет затвор после выстрела? Считая, что пистолет жестко закреплен. Ответ: 4,2 см.

6.7. Два малых по размеру груза массами $m_1=10$ кг и $m_2=15$ кг подвешены на нитях одинаковой длины $L=2$ м в одной точке и соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол $\alpha=60^\circ$ и отпущен. Определите высоту, на которую поднимутся оба груза после абсолютно неупругого удара. Ответ: 16 см.

6.8. В деревянный шар массой $M=8$ кг, подвешенный на нити длиной $L=1,8$ м, попадает горизонтально летящая пуля массой $m=4$ г. Определите скорость пули перед ударом, если нить с шаром и застрявшей в нем пулей отклонилась от вертикали на угол $\alpha=3^\circ$. Размером шара

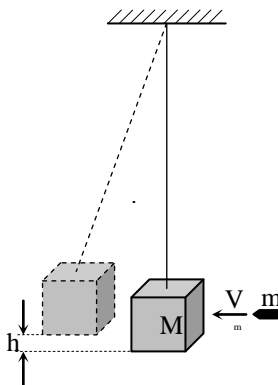


Рис.1.

пренебречь, удар пули считать центральным. Ответ: 444 м/с.

6.9. Пуля массой $m=10$ г, летевшая со скоростью $V=600$ м/с, попала в баллистический маятник массой $M=5$ кг и застряла в нем (рис.1). Определите, на какую высоту, откатнувшись после удара, поднялся маятник? Ответ: 7,2 см.

6.10. В баллистический маятник массой $M=3$ кг попадает горизонтально летевшая пуля массой $m=8$ г и застревает в нем (рис.1). Найдите скорость полета пули, если маятник, отклонившись после удара, поднялся на высоту $h=10$ см. Ответ: 532 м/с.

6.11. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на легком тонком металлическом стержне, и застревает в нем. Диаметр шара много меньше длины стержня, масса пули $m=5$ г, масса шара $M=0,5$ кг, скорость полета пули $V=500$ м/с. Определите, при какой предельной длине стержня шар от удара пули поднимется до верхней точки окружности? Ответ: 61 см.

6.12. Крутильно-баллистический маятник состоит из двух шаров, скрепленных невесомым стержнем и вертикальной упругой проволокой с закрепленными концами А и В (рис.2). Стержень с шарами может вращаться в горизонтальной плоскости, закручивая при этом проволоку. Масса каждого шара $M=1$ кг, радиусы $R=5$ см, расстояние между центрами шаров $r=30$ см. Коэффициент упругости проволоки при кручении $f=10$ Н·м/рад. Пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально со скоростью $V=100$ м/с так, как показано на рис. 2, попадает в центр одного из шаров и застревает в нем. На какой максимальный угол повернется после этого стержень с шарами? Ответ: $12,7^\circ$.

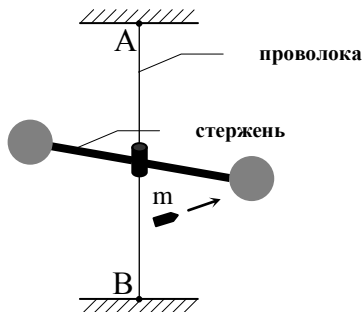


Рис.2.

6.13. По условию задачи 6.12 найдите, во сколько раз измениться скорость пули после абсолютно упругого удара о маятник. Принять $M=0,1$ кг. Ответ: 1,1.

6.14. Крутильно-баллистический маятник, конструкция которого описана в задаче 6.12, а вид показан на рис. 2, имеет следующие параметры: длина стержня $\ell=20$ см, масса стержня $m_1=600$ г, радиусы шаров $R=8$ см, массы шаров $M=0,5$ кг, коэффициент упругости закручивающейся проволоки $f=20$ Н·м/рад. Маятник используют для определения скорости полета пули. Эксперимент показал, что в результате абсолютно неупругого соударения горизонтально летевшей

пули массой $m_2=8$ г с одним из шаров маятника последний повернулся на угол $\varphi=18^\circ$. Вычислите скорость полета пули. Ответ: 188 м/с

6.15. Однородная прямоугольная пластина может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей по ее плоскости через середину. В край пластины перпендикулярно ее плоскости упруго ударяется горизонтально летящий со скоростью $V=3$ м/с шарик (рис.3). Найдите скорость шарика после удара, если масса пластины в 1,5 раза больше массы шарика. Ответ: 1 м/с.

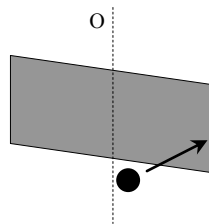


Рис.3.

6.16. По условию задачи 6.15 найдите угловую скорость вращения пластины сразу после удара. Длина ее горизонтальной стороны $\ell=80$ см. Ответ: 10 с^{-1} .

6.17. Прямоугольный металлический флажок массой $M=200$ г может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его край. Горизонтально летящий шарик малого размера попадает в середину флажка и прилипает к его поверхности. Масса шарика $m=100$ г, скорость перед ударом $V=5$ м/с. Найдите потерю механической энергии системы «флажок – шарик» в результате такого соударения. Ответ: 0,9 Дж.

6.18. Решите задачу 6.17 полагая, что после удара шарик отскакивает от пластины со скоростью $V'=1$ м/с. Ответ: 0,525 Дж.

6.19. Однородный стержень длиной $\ell=1$ м может свободно вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Пуля, летящая горизонтально и перпендикулярно стержню и его оси, попадает в другой (нижний) конец стержня и застревает в нем. В результате этого взаимодействия стержень отклонился на угол $\alpha=60^\circ$. Масса пули $m=7$ г, скорость перед ударом $V=360$ м/с. Определите массу стержня M , полагая, что $M \gg m$. Ответ: 2 кг.

6.20. Решите задачу 6.19 при условии, что пуля попадает в середину стержня. Ответ: 0,98 кг.

6.21. Решите задачу 6.19 при условии, что удар пули абсолютно упругий, а в результате этого удара пуля отскакивает от стержня и модуль ее скорости уменьшается в 2 раза. Ответ: 2,9 кг.

6.22. Вертикально расположенная прямоугольная пластина массой $M=0,6$ кг может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее верхнюю сторону. В нижний конец пластины перпендикулярно ее плоскости неупруго ударяется маленький по размеру шарик массой $m=100$ г, летящий со скоростью $V=3$ м/с. На какую максимальную высоту поднимется после этого нижний конец пластины? Ответ: 3,8 см.

6.23. Детская карусель, имеющая вид горизонтального диска вращается с частотой $\nu_1=0,7$ с⁻¹. Масса карусели $M=200$ кг, диаметр $d=4$ м. На ее край с высоты $h=1$ м вертикально вниз прыгает человек массой $m=50$ кг. Определите, какой станет частота вращения карусели и на сколько уменьшится суммарная механическая энергия карусели и человека после прыжка. Ответ: $0,93$ с⁻¹, 750 Дж.

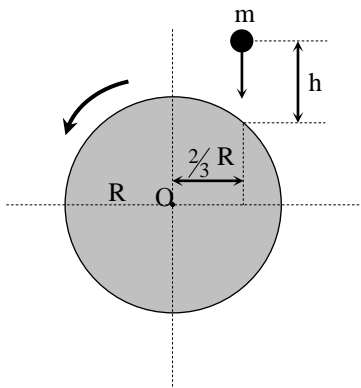


Рис.4

6.24. Цилиндр массой $M=2$ кг и радиусом $R=8$ см вращается вокруг горизонтальной оси O с угловой скоростью $\omega_1=2$ рад/с так, как показано на рисунке 4. На боковую поверхность цилиндра с высоты $h=0,5$ м падает, как показано на рисунке, пластилиновый шарик массой $m=50$ г. Какую угловую скорость ω_2 будет иметь цилиндр после неупругого удара шарика о цилиндр? Ответ: $0,66$ рад/с.

6.25. С какой высоты должен упасть шарик на цилиндр в задаче 6.24, чтобы цилиндр остановился? Ответ: $1,2$ м.